Dates.	Marches diurnes.	Moyennes.
Expériences aux grands arcs.		
1-3 juill. 1886	−33,70	
3-5 »	−33,57	
5-6 »	−34,36	
6-7 »	−33,78	
7-8 »	−33,64	
8-9 »	−33,53	−33s,38
9-10 »	−33,07	
10-16 »	−32,82	
16-17 »	−33,03	
17-20 »	−32,90	
Retour aux petits arcs.		
20-21 juill. 1886	−33,11	
21-22 »	−33,21	−33s,17
22-23 »	−33,18	
Moyenne des marches aux petits arcs		−33s,26
Moyenne des marches aux grands arcs		−33s,38

» L'isochronisme est à peu près parfait. »

C. R. Acad. Sci. Paris 112 (1891), p. 183-186

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la représentation approchée des fonctions.* Note de M. ÉMILE PICARD.

« Dans un Mémoire récent (1), M. Weierstrass s'est occupé de la représentation approchée d'une fonction continue arbitraire d'une variable réelle. En suivant une tout autre voie que l'illustre géomètre, on peut retrouver d'une manière très élémentaire quelques-uns de ses principaux résultats; c'est ce que je me propose d'indiquer dans cet Article.

» 1. Nous partirons de l'intégrale célèbre de Poisson

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} f(\psi)\, d\psi.$$

(1) Le Mémoire de M. Weierstrass a été traduit dans le Journal de M. Camille Jordan, en 1886.

I est une fonction de r et de φ, et on sait que, pour $r < 1$, on a le développement

$$I = \frac{a_0}{2} + r(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) + \ldots + r^m(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) + \ldots.$$

» Supposons que la fonction $f(\psi)$ soit continue, avec la période 2π, et soit g le maximum de ses valeurs absolues. En raisonnant comme le fait M. Schwarz dans son Mémoire sur l'intégrale de Poisson, on établit immédiatement que, étant donné à l'avance un nombre ε fixe, mais aussi petit qu'on veut, on peut trouver un angle suffisamment petit δ, tel que

$$|I - f(\varphi)| < \varepsilon + \frac{g(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)},$$

et cela quel que soit r. On peut choisir r suffisamment voisin de *un*, pour que

$$\frac{g(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)} < \varepsilon.$$

Soit $r_1 < 1$ une valeur de r satisfaisant à cette inégalité; r_1 étant ainsi choisi va rester fixe. Nous avons alors, en désignant par I_1 la valeur de I pour $r = r_1$

$$|I_1 - f(\varphi)| < 2\varepsilon,$$

quel que soit φ. Or la série

$$I_1 = \frac{a_0}{2} + r_1(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) + \ldots + r_1^m(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions de φ, est *uniformément* convergente. Ses termes sont moindres, en effet, que ceux de la série

$$4g\Sigma r_1^m.$$

» En prenant m assez grand pour que, dans cette dernière série, le reste correspondant soit moindre que ε, le reste de la série qui représente I_1 sera moindre que ε, en valeur absolue, *quel que soit* φ. Choisissons m de cette sorte, on aura alors une suite *finie* de Fourier

$$F(\varphi) = A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$$
$$(A_m = a_m r_1^m,\ B_m = b_m r_1^m),$$

telle que

$$|I_1 - F(\varphi)| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$|f(\varphi) - F(\varphi)| < 3\varepsilon.$$

On peut donc trouver une suite finie de Fourier $F(\varphi)$, *telle que* $f(\varphi)$ *puisse être représentée par* $F(\varphi)$ *avec l'approximation donnée à l'avance* 3ε.

» 2. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la fonction $f(\varphi)$ était continue de o à 2π avec la période 2π. Soit maintenant $f(\varphi)$ une fonction déterminée et continue dans un intervalle (α, β) moindre que 2π, on pourra, sur la portion de la circonférence de rayon *un*, où $f(\varphi)$ n'est pas déterminée, prendre une fonction continue quelconque se raccordant avec la première en α et β. A la fonction ainsi déterminée sur toute la circonférence, on peut appliquer les considérations précédentes, et notre fonction $f(\varphi)$ se trouve alors représentée par une suite *finie* de Fourier $F(\varphi)$, avec une approximation donnée à l'avance, pour toute valeur de φ entre α et β.

» De ce théorème nous pouvons conclure immédiatement un des théorèmes de M. Weierstrass. La fonction $F(\varphi)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de φ,

$$F(\varphi) = \alpha_0 + \alpha_1\varphi + \ldots + \alpha_n\varphi^n + \ldots,$$

» La série précédente est uniformément convergente dans l'intervalle (α, β); on peut donc prendre n assez grand pour que, en posant

$$P(\varphi) = \alpha_0 + \alpha_1\varphi + \ldots + \alpha_n\varphi^n,$$

on ait, *quel que soit* φ *entre* α *et* β,

$$|F(\varphi) - P(\varphi)| < \varepsilon,$$

et, par conséquent, d'après l'inégalité du paragraphe précédent,

$$|f(\varphi) - P(\varphi)| < 4\varepsilon.$$

» *Ainsi,* ε *étant donné à l'avance, on peut représenter la fonction* $f(\varphi)$, *continue dans l'intervalle* (α, β), *au moyen d'un polynôme* $P(\varphi)$ *avec une approximation au moins égale à* 4ε.

» Je rappelle, sans insister, que M. Weierstrass déduit immédiatement de la proposition précédente la possibilité de développer toute fonction continue $f(x)$ d'une variable réelle entre α et β en une série de la forme

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

les f étant des polynômes, cette série étant uniformément et absolument convergente. Le développement est d'ailleurs possible d'une infinité de manières.

» 3. Les considérations précédentes s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Bornons-nous à deux variables; on prendra alors l'intégrale analogue à celle de Poisson

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}} f(\theta',\psi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi',$$

où

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi').$$

I est une fonction de r, θ, ψ. On démontrera d'abord que toute fonction $f(\theta,\psi)$, continue sur toute la sphère de rayon *un*, est représentable par une suite *limitée* de fonctions Y_n de Laplace, avec une approximation au moins égale à ε, et de là on conclura que *toute fonction continue des deux variables réelles x et y dans un certain domaine peut être représentée par un polynôme* $\mathrm{P}(x,y)$, *avec une approximation au moins égale à une quantité d'ailleurs quelconque* ε.

» Il en résultera encore que la fonction $f(x,y)$ peut être développée en une série absolument et uniformément convergente

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) + \ldots + f_n(x,y) + \ldots,$$

les f étant des polynômes en x et en y. »

OPTIQUE. — *Sur une expérience récente, déterminant la direction de la vibration dans la lumière polarisée.* Note de M. A. Cornu.

« Le problème de la direction des vibrations de la lumière polarisée manquait, jusqu'à ces derniers temps, d'une solution expérimentale directe. Fresnel, il est vrai, avait apporté tant de considérations décisives tirées des lois de la réflexion ou de la double réfraction de la lumière en faveur de la normalité de la vibration au plan de polarisation, qu'aucun doute à ce sujet ne subsistait dans l'esprit de la plupart des physiciens. Toutefois l'obtention d'une preuve expérimentale directe était désirable : l'Académie l'avait mise plusieurs fois au concours, mais aucune réponse n'avait apporté la solution définitive de la question.

» L'Académie apprendra sans doute avec intérêt que cette démonstra-