

d'Héraclide du Pont comme passé dans le texte de la marge, où il aura été mis pour expliquer le mot *quelqu'un* ( $\tau\acute{\iota}\varsigma$ ). Ce nom n'offrirait donc aucune garantie d'authenticité.

PAUL TANNERY.

*Bull. Sciences Math.* 22  
(1898), 278-287. MÉLANGES.

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS;

PAR M. LEBESGUE.

Weierstrass a démontré <sup>(1)</sup> le premier que toute fonction continue pouvait être représentée, avec une approximation donnée, par un polynôme. Je vais indiquer quelques considérations élémentaires permettant de démontrer ce théorème et quelques-unes de ses conséquences.

Soit  $f(x)$  une fonction finie et continue dans un intervalle  $(a, b)$ . On peut partager l'intervalle  $(a, b)$  par les points  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  de telle façon que dans chaque intervalle  $(x_i, x_{i+1})$  l'oscillation de la fonction soit moindre qu'un nombre positif donné  $\varepsilon$ .

Inscrivons dans la courbe  $y = f(x)$  la ligne polygonale  $A_0 A_1 \dots A_n$  dont les sommets ont pour abscisses  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; elle représente dans l'intervalle  $(a, b)$  une fonction continue  $y = \varphi(x)$  qui diffère de  $f(x)$  de moins de  $\varepsilon$ . Or  $\varphi(x)$  est égale à la fonction continue  $\psi_1$  représentée dans l'intervalle  $(a, b)$  par la droite qui porte le côté  $A_0 A_1$ , plus une fonction  $\varphi_1$  représentée par une ligne polygonale  $A'_0 A'_1 \dots A'_n$  dont le premier côté  $A'_0 A'_1$  est sur l'axe  $Ox$ .  $\varphi_1$  est la somme des deux fonctions continues  $\psi_2$  et  $\varphi_2$ ;  $\psi_2$  est nulle entre  $x_0$  et  $x_1$  et est représentée par la droite qui porte  $A'_1 A'_2$  entre  $x_1$  et  $x_n$ ,  $\varphi_2$  est représentée par une ligne polygonale  $A''_0 A''_1 \dots A''_n$ ;  $A''_0, A''_1, A''_2$  sont sur  $Ox$ . On arrive finalement à

$$\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n.$$

<sup>(1)</sup> *Journal de Liouville*, année 1886.

$\psi_i$  étant une fonction continue nulle entre  $a$  et  $x_{i-1}$ , représentée par un segment de droite entre  $x_{i-1}$  et  $b$ . Si l'on fait le changement de variable

$$X = mx + n,$$

en choisissant convenablement  $m$  et  $n$ ,  $\psi_i$  sera définie dans une portion  $(\alpha, \beta)$  de l'intervalle  $(-1, +1)$  par la relation

$$\psi_i = k(X + |X|),$$

ce qui s'écrit

$$\psi_i = k[X + \sqrt{1 + (X^2 - 1)}].$$

Si l'on développe le radical par la formule du binôme en y considérant  $X^2 - 1$  comme une lettre, on obtient une série de polynômes en  $X$ , et par suite en  $x$ , qui converge uniformément vers  $\psi_i$ . La somme des  $n$  développements analogues est une série uniformément convergente de polynômes représentant  $\varphi(x)$ . En prenant un nombre suffisant de termes dans cette série on obtient un polynôme  $P(x)$  qui diffère de  $\varphi(x)$  de moins de  $\eta$ ,  $\eta$  étant choisi à l'avance.  $P(x)$  diffère de  $f(x)$  de moins de  $\varepsilon + \eta$ , donc :

I. *Étant donnée une fonction finie et continue dans un intervalle  $(a, b)$  on peut trouver un polynôme qui, dans tout l'intervalle, en diffère de moins d'une quantité positive quelconque donnée à l'avance.*

II. Comme première application, Weierstrass développe une fonction continue quelconque en série de polynômes de la façon suivante : Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  des quantités positives telles que la série  $\Sigma \varepsilon_n$  soit convergente, la série dont la somme des  $n$  premiers termes est un polynôme  $P_n$  qui diffère de la fonction continue donnée  $f(x)$  de moins de  $\varepsilon_n$  converge uniformément vers  $f(x)$ . De plus, cette série est absolument convergente car l'on a

$$|u_n| = |P_n - P_{n-1}| \leq |P_n - f| + |P_{n-1} - f| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}.$$

III. Une autre conséquence du théorème de Weierstrass est que toute série de fonctions continues dans un intervalle  $(a, b)$  y peut être remplacée par une série de polynômes. En effet,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  étant des nombres positifs tendant vers zéro, la série de polynômes dont la somme des  $n$  premiers termes diffère de la somme

des  $n$  premiers termes de la série proposée de moins de  $\varepsilon_n$  répond à la question.

*Fonctions ayant des points de discontinuités.* — En dérivant terme à terme la série de polynomes représentant

$$x + |x|,$$

on obtient une série de polynomes convergente dans l'intervalle  $(-1, +1)$  sauf au point  $O$ , représentant  $0$  pour  $x$  négatif,  $1$  pour  $x$  positif. Par l'addition de séries de cette nature à une série de polynomes représentant une fonction continue on développe en série de polynomes toute fonction n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités. La série obtenue est divergente aux points de discontinuités. Par un procédé différent nous allons arriver à une conclusion plus générale.

Soit  $f(x)$  une fonction qui dans l'intervalle  $(a, b)$  n'a de discontinuités que pour un ensemble dénombrable de valeurs

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots$$

Marquons les points  $A_0, A_1, \dots, A_n$  représentant la fonction  $y = f(x)$  pour  $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ . Quelques-uns de ces points pourront être à l'infini. Soient  $x_k$  l'une des  $n$  valeurs considérées pour  $x$ ,  $x_l$  celle de ces  $n$  valeurs qui lui est immédiatement supérieure.

1° Supposons  $A_k$  et  $A_l$  à distance finie.

A. Entre  $x_k$  et  $x_l$  n'existe aucun intervalle où la fonction est continue, ou bien il en existe plusieurs; traçons le segment  $A_k A_l$ .

B. Entre  $x_k$  et  $x_l$  existe un intervalle  $(x', x'')$  et un seul où  $f(x)$  est continue. Dans cet intervalle la fonction est représentée par un arc de courbe  $\alpha\beta$ .

a.  $f(x)$  est continue à droite pour  $x = x'$  et à gauche pour  $x = x''$ ; traçons le segment  $A_k \alpha$ , l'arc  $\alpha\beta$ , le segment  $\beta A_l$ ; les segments  $A_k \alpha$ ,  $\beta A_l$  peuvent être nuls.

b.  $f(x)$  n'est pas continue à droite pour  $x = x'$  ni à gauche pour  $x = x''$ ; traçons le segment  $A_k P_n$ , l'arc  $P_n Q_n$ , le segment  $Q_n A_l$ ;  $P_n$  et  $Q_n$  étant deux points de l'arc  $\alpha\beta$  qui tendent respectivement vers  $\alpha$  et  $\beta$  quand  $n$  croît indéfiniment.

*c.*  $f(x)$  est continue à droite pour  $x = x'$  et n'est pas continue à gauche pour  $x = x''$ ; commençons le tracé comme dans le cas (a), terminons-le comme dans le cas (b).

*d.*  $f(x)$  n'est pas continue à droite pour  $x = x'$  et est continue à gauche pour  $x = x''$ ; commençons le tracé comme en (b), terminons-le comme en (a).

2° Si l'un des deux points  $A_k, A_l$  ou tous les deux sont à l'infini, nous remplacerons celui ou ceux de ces deux points qui sont à l'infini par des points de même abscisse et dont l'ordonnée croîtra avec  $n$ .

Dans tous les cas, nous traçons dans l'intervalle  $(a, b)$  une courbe représentant une fonction  $\varphi_n(x)$ , on peut même supposer que la fonction  $f$  soit infinie dans un certain nombre, fini ou non, d'intervalles, à condition de compter les extrémités de ces intervalles comme des points de discontinuités et de faire jouer le rôle de la courbe  $\alpha\beta$  à une parallèle à  $Ox$  dont l'ordonnée croîtra indéfiniment avec  $n$ .

La fonction  $\varphi_n(x)$  a pour limite pour  $n$  infini  $f(x)$ , en entendant par là que  $\varphi_n(X)$  tend vers  $f(X)$  quand  $X$  est pris arbitrairement dans  $(a, b)$ . Ceci est évident si  $X$  est une valeur de discontinuité, ou appartient à un intervalle où la fonction est continue, ou est extrémité d'un pareil intervalle. Pour une autre valeur,  $X$  est la limite d'une suite  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  de valeurs de discontinuités,  $f(X)$  étant continue pour  $x = X$ ,  $f(X)$  est la limite de la suite  $f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \dots$ . D'autre part, pour  $n$  assez grand  $\varphi_n(x)$  est compris entre  $f(x)$  et  $f(\beta)$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant les extrémités de celui des intervalles, obtenus à l'aide des points de subdivision  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , qui contient  $X$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(x^{(p)}) = f(X).$$

Donc

$$f(x) = \varphi_1(x) + \Sigma[\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)];$$

$f(x)$  est représentable par une série de fonctions continues et, par suite, par une série de polynomes.

IV. *Toute fonction continue dans un intervalle  $(a, b)$ , sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, est développable dans cet intervalle en série de polynomes, abso-*

lument et uniformément convergente dans tout intervalle où n'existe pas de points de discontinuités.

Il est facile de donner des exemples de fonctions ayant une infinité dénombrable de discontinuités.

*Premier exemple.* — Entre  $\frac{1}{n}$  et  $\frac{1}{n+1}$ , la fonction  $f(x)$  est égale à une fonction continue quelconque  $A_n$ . Aux points de discontinuités, elle a une valeur quelconque finie ou infinie.  $A_n$  sera limitée ou non; ce sera, par exemple,  $A_n = \frac{1}{x - \frac{1}{n}}$ .

*Deuxième exemple.* —  $x_1, x_2, \dots$  étant donnés, on considère une fonction nulle si  $x$  n'est pas une des valeurs données, et égale à  $\frac{1}{n}$  pour  $x = x_n$ . Les points  $x_1, x_2, \dots$  sont les seuls points de discontinuités.

Il existe donc, en particulier, des séries de polynômes nulles pour toutes les valeurs commensurables (ou algébriques) d'un intervalle et pour celles-là seulement.

*Troisième exemple.* — Les fonctions à variation limitée de M. Jordan.

Dans ce qui précède, nous n'avons pas obtenu les fonctions les plus générales représentables par des séries de polynômes; M. Baire a indiqué (*Comptes rendus*, 21 mars 1898) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable soit représentable par une série de polynômes.

*Fonctions de plusieurs variables.* — Soit  $f(x, y)$  une fonction de deux variables finie et continue par rapport à l'ensemble  $(x, y)$  pour  $a \leq x \leq b$ ;  $c \leq y \leq d$ . Cherchons à le représenter approximativement par un polynôme.

On peut trouver des valeurs  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ;  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  telles que pour  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$ , l'oscillation de la fonction soit moindre qu'un nombre donné  $\varepsilon$ .

Soit  $A_{ij}$  le point de coordonnées  $x = x_i$ ,  $y = y_j$ ,  $z = f(x_i, y_j)$ . Le paraboloides de plans directeurs  $zOx$ ,  $zOy$  passant par  $A_{i,j}$ ;  $A_{i+1,j}$ ;  $A_{i,j+1}$ ;  $A_{i+1,j+1}$  représente pour  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ;  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$

une fonction qui diffère de  $f(x)$  de moins de  $\varepsilon$ . Or, la fonction continue représentée par l'ensemble de ces fragments de paraboloïdes est une somme de fonctions continues telles que la suivante :

$$k[XY + |XY| + X|Y| + Y|X|]$$

que l'on peut représenter par une série uniformément convergente de polynômes. On achève comme précédemment.

Le même raisonnement réussit avec un nombre quelconque de variables; l'image géométrique fait seule rapidement défaut. Il faudra parler, par exemple, de fonctions linéaires par rapport à chacune des variables là où l'on parlait de droite ou de paraboloïde.

Les propositions I, II, III sont donc encore vraies, quand on y remplace *fonction d'une variable continue dans un intervalle* ( $a, b$ ) par *fonction de plusieurs variables continue par rapport à l'ensemble dans un domaine fini*.

Des artifices analogues à ceux qui ont conduit au théorème IV nous conduiront à des propositions telles que la suivante :

V. *Si une fonction de deux variables, définie dans un domaine fini  $\Omega$ , connexe ou non, partout continue par rapport à l'ensemble des variables, sauf en des points formant un ensemble dénombrable et sur des courbes  $C^{(1)}$  formant un ensemble dénombrable, est telle que, sur chacune des courbes  $C$ , par rapport à un paramètre fixant d'une façon continue la position d'un point sur cette courbe, la fonction soit continue, sauf en un ensemble dénombrable de points, elle est représentable par une série de polynômes, absolument et uniformément convergente dans tout domaine ne contenant pas de discontinuités.*

On peut aussi supposer que la fonction est infinie sur certains arcs des courbes  $C$  ou dans certains domaines en nombre fini ou non à condition de compter les courbes frontières de ces domaines comme faisant partie des courbes  $C$ .

---

(<sup>1</sup>) Le mot *courbe* est pris dans un sens restreint; aucune des courbes  $C$  ne doit passer dans le voisinage de tous les points d'une aire.

*Fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles.* — M. Baire (*Comptes rendus*, 1897) a montré comment l'on pouvait construire des fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles sans l'être par rapport à l'ensemble. La méthode employée précédemment permet d'obtenir des développements de ces fonctions.

Soit  $f(x, y)$  une fonction définie pour  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  continue séparément par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ . Divisons l'intervalle  $(a, b)$  en  $n$  parties égales; soient  $x_0 = a$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ,  $x_n = b$  les points de divisions.

Considérons la fonction  $\varphi_n(x, y)$  continue par rapport à l'ensemble  $xy$  et définie entre  $x_p$  et  $x_{p+1}$  par

$$\varphi_n(x, y) = \frac{f(x_{p+1}, y)(x - x_p) - f(x_p, y)(x - x_{p+1})}{x_{p+1} - x_p}.$$

Les fonctions  $\varphi_n(x, y)$  ont  $f(x, y)$  pour limite quand  $n$  croît indéfiniment. En effet, soit  $X, Y$  un système de valeurs pour  $x, y$ . Choisissons  $n$  assez grand pour que dans chaque intervalle  $x_i, x_{i+1}$ , l'oscillation de la fonction  $f(x, Y)$  soit moindre que  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant donné à l'avance. Si  $X$  est dans l'intervalle  $x_p, x_{p+1}$ , l'expression

$$|f(X, Y) - \varphi_n(X, Y)|$$

est plus petite que la plus grande des deux suivantes

$$|f(X, Y) - f(x_p, Y)| \quad |f(X, Y) - f(x_{p+1}, Y)|$$

qui sont plus petites que  $\varepsilon$ .

On peut donc écrire

$$f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n);$$

$f(x, y)$  est représentable par une série de fonctions continues, et, par suite, par une série de polynômes; on peut même remarquer que cette série est uniformément convergente pour  $y$  donné.

Le même raisonnement prouve que :

VI. *Une fonction des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p$ , continue par rapport à l'ensemble des  $x$  et par rapport à l'ensemble des  $y$ , est représentable dans tout domaine fini par une série de polynômes.*

Dans le cas de plus de deux variables, on est conduit à des propositions telles que la suivante :

VII. *Une fonction de quatre variables  $x, y, z, t$ , continue dans un certain domaine par rapport à chacune de ces variables, est représentable dans ce domaine :*

1° *Par une série de fonctions continues par rapport aux ensembles  $(x, y)(x, z)(x, t)$ ;*

2° *Ou par une série de séries de fonctions continues par rapport aux ensembles  $(x, y, z)(x, y, t)$ ;*

3° *Ou par une série de séries de séries de polynomes.*

Cette proposition subsiste si l'on fait jouer le rôle de  $x, y, z, t$  à des ensembles  $(x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_q), (z_1, z_2, \dots, z_r), (t_1, t_2, \dots, t_s)$ .

Les mêmes artifices que précédemment permettent de supposer que ces fonctions ont des discontinuités du genre de celles rencontrées aux théorèmes IV et V.

*Approximations à l'aide des suites de Fourier.* — Weierstrass a démontré que toute fonction continue ayant la période  $2\pi$  peut se représenter avec telle approximation que l'on veut, par une suite finie de Fourier ou, ce qui est la même chose, par un polynome en  $\cos x$  et  $\sin x$  (1).

M. Picard déduit cette proposition des propriétés de l'intégrale de Poisson, et en conclut la possibilité de représenter approximativement une fonction continue par un polynome.

On peut de bien des manières passer inversement de l'approximation par un polynome à l'approximation par une suite de Fourier.

Soit  $f(x)$  une fonction continue ayant la période  $2\pi$ . On peut trouver une fonction continue  $\varphi(x)$  ayant la période  $2\pi$  qui diffère

---

(1) M. Volterra [*Sul Principio di Dirichlet (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tome XI)*] démontre cette proposition de la façon suivante : on peut approcher autant que l'on veut d'une courbe à l'aide d'une ligne polygonale. Une telle ligne représente une fonction qui, n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, peut, d'après Dirichlet, être développée en série de Fourier uniformément convergente.



de  $f(x)$  de moins de  $\varepsilon$  et qui soit telle que, pour  $x$  assez petit, on ait

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(2\pi - x), & \varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \\ \varphi(\pi - x) &= \varphi(\pi + x), & \varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= \varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(x) = A(\cos x) + \sin x B(\cos^2 x) + \sin x \cos x C(\cos^2 x).$$

En échangeant dans cette expression  $x$  en  $\pi - x$ ,  $\pi + x$ ,  $2\pi - x$  on tire

$$A(\cos x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(2\pi - x)}{2},$$

$$B(\cos^2 x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(2\pi - x) + \varphi(\pi - x) - \varphi(\pi + x)}{4 \sin x},$$

$$C(\cos^2 x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(2\pi - x) - \varphi(\pi - x) + \varphi(\pi + x)}{4 \sin x \cos x}.$$

Donc  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des fonctions finies et continues de  $\cos x$ , et, par suite,  $\varphi(x)$  ou  $f(x)$  peut être représentée avec telle approximation que l'on veut, par un polynôme en  $\sin x$  et  $\cos x$ .

Sous la seule réserve que les intervalles dont il s'agit soient plus petits que  $2\pi$ , les théorèmes I, II, III sont exacts si l'on remplace dans leur énoncé *polynôme* par *suite finie de Fourier*.

Ce résultat se déduit plus facilement encore du théorème sur les fonctions de deux variables.

Une fonction continue ayant la période  $2\pi$  peut, en effet, être considérée comme attachée aux points de la circonférence

$$X = \cos x, \quad Y = \sin x.$$

Soit  $F(X, Y)$  une fonction continue par rapport à l'ensemble  $(X, Y)$  et égale sur la circonférence à la fonction proposée. On peut trouver un polynôme  $P(X, Y)$  qui diffère de moins de  $\varepsilon$  dans un domaine comprenant la circonférence; donc  $P(\cos x, \sin x)$  diffère de la fonction proposée de moins de  $\varepsilon$ .

Sous cette forme, la démonstration se généralise immédiatement.

Soit une fonction continue par rapport à l'ensemble de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; ayant la période  $\pi$  pour chacune des  $n$

premières variables et la période  $2\pi$  pour  $x_n$ , telle que pour  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) la fonction soit indépendante des variables  $x_{i+1}, \dots, x_n$ . On peut la regarder comme attachée aux points de la variété

$$X_1 = \cos x_1, \quad X_2 = \sin x_1 \cos x_2, \quad \dots, \quad X_n = \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{n-1} \cos x_n,$$

$$X_{n+1} = \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{n-1} \sin x_n$$

ou

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n+1}^2 = 0;$$

elle est donc représentable avec telle approximation que l'on veut par un polynôme en  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ .

---

### SUR LA THÉORIE DES ABAQUES A ALIGNEMENTS;

PAR M. E. DUPORCQ.

1. Dans le numéro de juillet dernier du *Bulletin des Sciences mathématiques*, M. d'Ocagne a signalé, entre autres problèmes soulevés par l'étude de la nomographie, l'intérêt qui s'attache à la question suivante : étant donnée une relation entre plusieurs variables, rechercher si elle peut être représentée graphiquement par un abaque d'un type déterminé. M. d'Ocagne insiste, en particulier, sur le cas des abaques dits à *alignements*, qui sont parmi les plus simples; le problème se réduit, dans ce cas, au suivant : vérifier si une fonction donnée de trois variables,  $F(x, y, z)$ , peut être mise sous la forme

$$(1). \quad F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \chi_1(x) & \psi_1(x) \\ \varphi_2(y) & \chi_2(y) & \psi_2(y) \\ \varphi_3(z) & \chi_3(z) & \psi_3(z) \end{vmatrix}.$$

La recherche des équations différentielles, auxquelles doit satisfaire la fonction  $F$ , conduit pratiquement à des calculs inextricables; mais le problème que l'on a en vue sera résolu tout aussi bien si, au lieu de ces équations différentielles, on parvient à établir des équations fonctionnelles nécessaires et suffisantes. La méthode que je vais présenter, et dont j'ai signalé déjà les